

ع

# دراسة الدوال الاتصال - النهايات

## تمرين 1

(1) لتكن  $f$  الدالة المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$

أ- حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

ب- أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$

أكاديمية الدار البيضاء أنفا (دورة مارس 1991)

## الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = +\infty \text{ و بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} = +\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{\sin x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1 \text{ لدينا (ضع } y = 2x \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan 2x} = 1 \cdot 0 = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \quad (1)$$

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 - x \neq 0$$

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ أو } x = 0)$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, 1\} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 1) = 1 \text{ ب-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ و بما أن } x^2 - x > 0 \text{ إذا كان } x < 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ و بما أن } x^2 - x > 0 \text{ إذا كان } x > 1 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

## تمرين 2

لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 - mx^2 + x - m}{x - 1}$  حيث  $m$  بارامتر حقيقي.

(1) حدد قيمة العدد  $m$  لكي تقبل  $f$  تقديدا بالاتصال  $g$  في النقطة  $x_0 = 1$  ، ثم عرف هذا التمديد.

(2) لتكن  $h$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 + 1 & ; x < 2 \\ h(x) = \frac{2x+1}{x-1} & ; x \geq 2 \end{cases}$$

أ- أدرس اتصال الدالة  $h$  في النقطة 2.

ب- هل الدالة  $h$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ؟ علل جوابك.

أكاديمية الدار البيضاء أنفا (دورة مارس 1991)

### الحل

أي  $g(x) = x^2 + 1$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-1} = 5 \text{ لدينا } (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 1 = 5 \text{ و}$$

و  $h(2) = 5$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2)$  وهذا يعني أن  $h$  متصلة في 2.

ب- الدالة  $x \mapsto x^2 + 1$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة حدودية)، فهي إذن متصلة على  $]-\infty, 2[$ .

الدالة  $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$  جذرية، فهي إذن متصلة على حيز تعريفها.

$[1, +\infty[$ ، وخصوصا على  $[2, +\infty[$

الدالة  $h$  متصلة في 2 (السؤال أ-).

بالتالي  $h$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $1 \notin D_f$ . إذن لكي تقبل  $f$  تمديدا بالاتصال  $g$  في  $x_0 = 1$  يكفي أن تكون لها نهاية منتهية في 1 لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - m x^2 + x - m}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x - m) + (x - m)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x - m)}{x - 1} \end{aligned}$$

تكون هذه النهاية منتهية في الحالة الوحيدة  $m = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1 = 2 \text{ في هذه الحالة}$$

الدالة  $g$  معرفة إذن كالتالي :

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \\ g(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ إذا كان } x \neq 1$$

### تمرين 3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 2x)^2} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2 + x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{x^2 + 1}{1 - 2x} \right)$$

أكاديمية ابن امسيك - الفداء الدار البيضاء (دورة مارس 1991)

### الحل

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6}{x^2 + 3x + 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27} = \frac{1}{3} \text{ أي :}$$

(الحساب المباشر يعطي أشكالا غير محددة).

لدينا :  $x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$

و  $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 6)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} \text{ إذن}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{x^2+1}{1-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+x+1}{1-2x}$$

إذن

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+1} = 2 \quad \text{إذن}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}.$$

$$(x^2 - 2x)^2 = x^2(x-2)^2 \quad \text{و}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-1}{x^2(x-2)} = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$x + \frac{x^2+1}{1-2x} = \frac{-x^2+x+1}{1-2x} \quad \text{لدينا :}$$

#### تمارين 4

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + (1-m)x - m}{x^2 - x}$  حيث  $m$  عدد حقيقي.

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(3) نفترض في هذا السؤال أن  $m = 1$ .

أ- بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال  $g$  في النقطة 1 ثم عرف  $g$ .

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

(4) نفترض في هذا السؤال أن  $m \neq 1$ .

أحسب ، بدلالة  $m$  :  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ f(x) + \frac{2(m-1)}{x-1} \right]$

أكاديمية ابن امسيك - النداء الدار البيضاء (دورة مارس 1991)

#### الحل

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x} = 3$$

وهذا يعني أن الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال  $g$  في النقطة 1 وهو :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x} & , x \in D_f \\ g(1) = 3 \end{cases}$$

أو :  $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ .

ب-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty$

كذلك  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$

(1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x \neq 0\}$

لدينا :  $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ أو } x=1)$

إذن  $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

(3) أ- بما أن  $m = 1$  فإن  $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x}$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}$

(4) لكل  $x$  من  $D_f$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ f(x) + \frac{2(m-1)}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)(x^2+x+m)}{x(x-1)} \right] \text{ إذن}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+m}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ f(x) + \frac{2(m-1)}{x-1} \right] = 2+m \text{ وبالتالي}$$

$$f(x) + \frac{2(m-1)}{x-1} = \frac{x^3 + (1-m)x - m}{x^2 - x} + \frac{2(m-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^3 + (1-m)x - m + 2x(m-1)}{x^2 - x}$$

$$= \frac{x^3 - x + mx - m}{x^2 - x}$$

$$= \frac{x(x-1)(x+1) + m(x-1)}{x(x-1)}$$

### تمرين 5

لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{2(x^2 + 2x - 3)}$

(1) حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

(2) ادرس اتصال الدالة  $f$  على حيز تعريفها.

(3) أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) هل الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة  $x_0 = -3$  ؟

أكاديمية الرباط (دورة مارس 1991)

### الحل

(4) لدينا  $-3 \in D$  .

نبحث عن  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  . هناك شكل غير محدد .

نلاحظ أن  $-3$  جذر لكل من الحدوديتين  $x^2 - 3x - 18$

و  $2(x^2 + 2x - 3)$  .

بعد القسمة الاقليدية نجد :

$$x^2 - 3x - 18 = (x+3)(x-6)$$

$$2(x^2 + 2x - 3) = 2(x+3)(x-1) \text{ و}$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-6)}{2(x+3)(x-1)} = \frac{x-6}{2(x-1)} \text{ إذن لكل } x \text{ من } D :$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-6}{2(x-1)} = \frac{9}{8} \text{ ومنه}$$

خلاصة : الدالة  $f$  غير معرفة في  $-3$  وتقبل نهاية منتهية في هذه النقطة، إذن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في  $x_0 = -3$  .

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0 \quad (1)$$

لدينا  $\Delta' = 1 + 3 = 4 > 0$  إذن جعنا ثلاثية الحدود  $x^2 + 2x - 3$

$$x_2 = \frac{-1-2}{1} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{-1+2}{1} = 1 \text{ هما}$$

بالتالي :  $D = \mathbb{R} - \{-3, 1\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(2) الدالة  $f$  جذرية، فهي إذن متصلة على  $D$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 18}{2x^2 + 4x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2(x^2 + 2x - 3) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x - 18 = -20 \text{ لدينا} *$$

جدول إشارة  $2(x^2 + 2x - 3)$  هو :

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$
$2(x^2 + 2x - 3)$	+	$\circ$	$\circ$	+

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$



أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 1 - \frac{\sqrt{10x^2 + 1}}{x-2} \right)$$

(3)

أكاديمية الرباط (دورة مارس 1991)

الحل

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - \sqrt{10})x^2 - 7x + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - \sqrt{10})x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \sqrt{10})x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 1 - \frac{\sqrt{10x^2 + 1}}{x-2} \right) = -\infty \text{ فإن } 3 - \sqrt{10} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \text{ نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1}$$

(1)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \frac{1}{2} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}$$

(2)

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{1}{x + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 1 - \frac{\sqrt{10x^2 + 1}}{x-2} \right)$$

(3)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x-1)(x-2) - \sqrt{10x^2 + 1}}{x-2}$$

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = \frac{-x^3 + x^2 - x + 1}{(2x-1)(x-1)}$

(1) حدد على شكل اتحاد مجالات، حيز تعريف الدالة  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ احسب (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) \text{ احسب (3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$$

## الرياضيات

(4) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

ب- هل الدالة  $g$  تقبل تمديدا بالاتصال في 1 ؟ علل جوابك.

أكاديمية فاس (دورة مارس 1991)

### الحل

$x$	$\frac{1}{2}$	1
$(2x-1)(x-1)$	$+$ $\bigcirc$ $-$	$\bigcirc$ $+$

إذن  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (2x-1)(x-1) = 0^+$  ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (2x-1)(x-1) = 0^-$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$

(4) أ- لدينا شكل غير محدد.

نلاحظ أن 1 جذر للحدودية  $-x^3 + x^2 - x + 1$   
بعد القسمة الاقليدية نجد :  $-x^3 + x^2 - x + 1 = (x-1)(-x^2-1)$

إذن لكل  $x$  من  $D_g$  :  $g(x) = \frac{(x-1)(-x^2-1)}{(2x-1)(x-1)} = -\frac{x^2+1}{2x-1}$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2+1}{2x-1} = -2$

ب- الدالة  $g$  تقبل تمديدا بالاتصال في 1 لأن  $1 \in D_g$  والدالة  $g$  تقبل نهاية منتهية في 1.

$$x \in D_g \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \neq 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1 \neq 0 \text{ و } x-1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ و } x \neq 1$$

$$D_g = ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[ \text{ إذن } D_g = ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty \text{ كذلك.}$$

$$(3) \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} -x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{5}{8}$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)(x-1) = 0$$

جدول إشارة  $(2x-1)(x-1)$  هو :

### تمرين 8

$$\text{إذا كان } x < 0 \text{ : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$$

$$\text{إذا كان } x \geq 0 \text{ : } f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(2-x)}{x^2-4}$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

(1) حدد على شكل اتحاد مجالات حيز تعريف الدالة  $f$ .

(2) أ- حدد النهاية على اليمين والنهاية على اليسار للدالة  $f$  في 0

ب- هل الدالة  $f$  متصلة في 0 ؟ علل جوابك.

(3) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

أكاديمية فاس (دورة مارس 1991)



الحل

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x+2} = -\frac{\cos\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)}{4}$$

من جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)}{2-x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{\cos\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)}{4}$$

بالتالي :

\* كذلك هناك شكل غير محدد بالنسبة لـ  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{6}$$

بالتالي :

(1) المعادلة  $x^2-4=0$  تكافئ  $x=2$  أو  $x=-2$

من جهة أخرى  $x^2+5 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن  $D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, 2[ \cup ]2, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{5}-3}{-4} = -\frac{\sqrt{5}-3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(2-x)}{x^2-4} = 0$$

ب- الدالة  $f$  ليست متصلة في 0 لأنها ليست متصلة على اليسار في

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

(3) \* بالنسبة للنهاية  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، لدينا شكل غير محدد.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(2-x)}{(x-2)(x+2)} : x \neq 2 \text{ و } x \geq 0 \\ &= -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(2-x)}{x+2} \end{aligned}$$

تمرين 9

لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}{x^2 - 2x}$

(1) أ- حدد  $D$  حيز تعريف الدالة  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2-2x}$$

ب- بين أن  $f$  تقبل تمديداً بالاتصال في النقطة 2 وحدد هذا التمديد.

(3) هل يوجد تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة 0 ؟ (علل جوابك)

أكاديمية مكناس (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x \neq 0\}$$

حلا المعادلة  $x^2 - 2x = 0$  هما 0 و 2.

$$D = \mathbb{R} - \{0, 2\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

## الرياضيات

$$\forall x \in D ; f(x) = \frac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2-2x} \text{ بالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-1)^2}{x} \text{ بـ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{9}{2} \text{ إذن}$$

من جهة أخرى  $2 \notin D$ ، إذن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 2. هذا التمديد هو الدالة  $g$  المعرفة كالتالي :

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = f(x) \text{ إذا كان } x \in D \\ g(2) = \frac{9}{2} \end{array} \right\}$$

(3) الدالة  $f$  لا تقبل نهاية منتهية عند النقطة 0 فهي إذن لا تقبل تمديدا بالاتصال عند هذه النقطة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = -2 \text{ لدينا } *$$

جدول إشارة  $x^2 - 2x$  هو :

x	0	2
$x^2 - 2x$	+	-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

(2) أ- لكل  $x$  من  $D$  :

$$\begin{aligned} (x-2)(2x-1)^2 &= (x-2)(4x^2-4x+1) \\ &= 4x^3-4x^2+x-8x^2+8x-2 \\ &= 4x^3-12x^2+9x-2 \end{aligned}$$

$$\frac{(x-2)(2x-1)^2}{x^2-2x} = \frac{4x^3-12x^2+9x-2}{x^2-2x} = f(x) \text{ إذن}$$

### تمارين 10

$a$  و  $b$  بارامتران حقيقيان. نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \frac{ax+b}{x+2} \text{ إذا كان } x \text{ ينتمي إلى } ]-1, 1[ \\ g(x) = |x-2| \text{ إذا كان } x \text{ ينتمي إلى } ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[ \end{array} \right\}$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة  $g$ .

(2) حدد  $a$  و  $b$  علما أن الدالة  $g$  متصلة في النقطة -1 وفي النقطة 1.

أكاديمية مكناس (دورة مارس 1991)

### الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) \text{ يعني } 1 \text{ كذلك } g \text{ متصلة في } 1$$

$$\frac{a+b}{3} = 1 \text{ أي}$$

$$\begin{cases} -a+b=3 \\ a+b=3 \end{cases} \text{ نحصل إذن على النظام}$$

$$\text{ومنها } a=0 \text{ و } b=3.$$

$$D_g = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[ \cup ]-1, 1[ = \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax+b}{x+2} = -a+b \text{ لدينا } (2)$$

$$g(-1) = 3 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x-2| = 3 \text{ و}$$

$$\text{الدالة } g \text{ متصلة في } -1 \text{ يعني } -a+b=3.$$



تمارين 11

أحسب النهايات التالية :

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$$

$$\left( x = h + \frac{\pi}{3} \text{ يمكن وضع } \right) f = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x}{3x - \pi}$$

$$(2) a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6} \quad (1)$$

$$(4) c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9} \quad (3)$$

$$(6) e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x} \quad (5)$$

أكاديمية وجدة (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan 2x}{2x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan y}{y}} = 1 \quad *$$

$$e = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \quad \text{إذن}$$

$$(6) \text{ نضع } x = h + \frac{\pi}{3} \text{ إذن } h = x - \frac{\pi}{3} \text{ . عندما يتؤول } x \text{ إلى } \frac{\pi}{3} \text{ فإن } h \text{ يتؤول إلى } 0.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x &= 3\sqrt{3} \cos \left( h + \frac{\pi}{3} \right) - 3 \sin \left( h + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \left( \cos h \cos \frac{\pi}{3} - \sin h \sin \frac{\pi}{3} \right) - 3 \left( \sin h \cos \frac{\pi}{3} + \cos h \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} \cos h - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h \right) - 3 \left( \frac{1}{2} \sin h + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos h \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos h - \frac{9}{2} \sin h - \frac{3}{2} \sin h - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos h \\ &= -6 \sin h \end{aligned}$$

$$f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 \sin h}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} -2 \cdot \frac{\sin h}{h} = -2 \quad \text{إذن}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{3x^7} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18}}{2 \cdot x^{18}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7 \quad (4)$$

نضع  $X = 7x$  . عندما يتؤول  $x$  إلى 0 فإن  $X$  يتؤول إلى 0.

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7 \quad \text{إذن}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{5x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1 \quad \text{لدينا : } *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \quad *$$

تمارين 12

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} & \text{si } x \notin \{-2, 0, 2\} \\ f(-2) = 1 \\ f(2) = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

أحسب النهايات التالية :

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$$

$$\left( x = h + \frac{\pi}{3} \text{ يمكن وضع } \right) f = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x}{3x - \pi}$$

$$(2) a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6} \quad (1)$$

$$(4) c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9} \quad (3)$$

$$(6) e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x} \quad (5)$$

أكاديمية وجدة (دورة مارس 1991)

### الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan 2x}{2x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\tan y} = 1 \quad *$$

$$e = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \quad \text{إذن}$$

$$(6) \text{ نضع } x = h + \frac{\pi}{3} \text{ إذن } h = x - \frac{\pi}{3} \text{ عندما يتؤول } x \text{ إلى } \frac{\pi}{3} \text{ فإن } h \text{ يتؤول إلى } 0. \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x &= 3\sqrt{3} \cos \left( h + \frac{\pi}{3} \right) - 3 \sin \left( h + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \left( \cos h \cos \frac{\pi}{3} - \sin h \sin \frac{\pi}{3} \right) - 3 \left( \sin h \cos \frac{\pi}{3} + \cos h \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} \cos h - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h \right) - 3 \left( \frac{1}{2} \sin h + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos h \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos h - \frac{9}{2} \sin h - \frac{3}{2} \sin h - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos h \\ &= -6 \sin h \end{aligned}$$

$$f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 \sin h}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} -2 \cdot \frac{\sin h}{h} = -2 \quad \text{إذن}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x}{3x^7 + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{3x^7} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18} + 1}{2(x^2 + 2)^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{18}}{2 \cdot x^{18}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7 \quad (4)$$

نضع  $X = 7x$ . عندما يتؤول  $x$  إلى 0 فإن  $X$  يتؤول إلى 0.

$$d = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7 \quad \text{إذن}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{5x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1 \quad \text{لدينا : } *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \quad *$$

### تمرين 12

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} & \text{si } x \in [-2, 0, 2] \\ f(-2) = 1 \\ f(2) = t & , t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



- (1) حدد حيز تعريف الدالة  $f$ .
- (2) هل الدالة  $f$  متصلة عند النقطة  $x_0 = -2$  ؟
- (3) حدد  $t$  علما أن  $f$  متصلة عند النقطة  $x_1 = 2$  ؟
- (4) هل يوجد تقيد بالاتصال للدالة  $f$  عند النقطة  $x_2 = 0$  ؟

أكاديمية وجدة (دورة مارس 1991)

### الحل

إذن :  $f$  متصلة في  $x_1 = 2$  تعني  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

أي  $t = 4$

(4) لدينا  $0 \notin D_f$

نبحث هل  $f$  تقبل نهاية منتهية في 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 - 16 = -16 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 4x = \lim_{x \rightarrow 0} x(x^2 - 4) = 0^- \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

ومنه فإن  $f$  لا تقبل تقديدا بالاتصال في  $x_2 = 0$ .

$$(1) \text{ المعادلة } x(x^2 - 4) = 0 \text{ تعني } x^3 - 4x = 0$$

أي  $(x^2 - 4 = 0 \text{ أو } x = 0)$  . ومنه  $x = 0$  أو  $x = 2$  أو  $x = -2$  .  
وبما أن  $f(-2)$  و  $f(2)$  موجودان فإن :

$$D_f = (\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}) \cup \{-2, 2\} = \mathbb{R}^*$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x(x^2 - 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4}{x} = -4$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$  . ومنه فإن  $f$  ليست متصلة في  $x_0 = -2$

$$(3) \text{ لدينا } t = 4 \text{ و } f(2) = t \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x} = 4$$

### تمرين 13

أحسب النهايات التالية :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) ; b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^2 - 1} ; d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$$

أكاديمية مراكش (دورة مارس 1991)

### الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{-3x^3} = -\frac{2}{3} \text{ إذن}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0$$

نحصل إذن على شكل غير محدد. وبعد القسمة الاقليدية لـ  
 $x^3 - 3x^2 + x + 1$  على  $x - 1$  نجد :

$$(a) \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} / \{-1\} : x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = x \cdot \frac{2}{x+1}$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$(b) \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^* : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3|x|(x^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{-3x^3 + 6x}$$

$$\cos\left(3X + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(3X + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(3X + \pi) = \sin 3X$$

$$\frac{\sin X}{\sin 3X} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{3X}{\sin 3X} \quad \text{من جهة أخرى}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{3X}{\sin 3X} = 1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin X}{\sin 3X} = -\frac{1}{3} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 3x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \quad (d)$$

نحصل إذن على شكل غير محدد.

$$x = X + \frac{\pi}{2} \quad \text{أي} \quad X = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} = \frac{\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(3X + \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin X}{\sin 3X} \quad \text{إذن}$$

#### تمرين 14

لتكن  $f$  الدالة العددية لتغير حقيقي حيث :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 3x & ; x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + x + 4 & ; -1 < x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} & ; x > 1 \end{cases}$$

(1) حدد  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) بين أن  $f$  متصلة في النقطة  $(-1)$ .

(3) هل الدالة  $f$  متصلة في النقطة  $1$  ؟

(4) بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة  $2$  وعرف هذا التمديد.

أكاديمية مراكشي (دورة مارس 1991)

#### الحل

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x + 4) = 4 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 4 \quad \text{إذن}$$

وهذا يعني أن  $f$  متصلة في النقطة  $(-1)$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = +\infty \quad (3)$$

إذن  $f$  غير متصلة على اليمين في النقطة  $1$  وهذا يعني أنها غير متصلة في  $1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \quad (4)$$

(1) الدالة  $f$  حدودية على كل من المجالين  $]-\infty, -1]$  و  $]-1, 1]$

إذن  $D \subset ]-\infty, 1]$ .

لكل  $x$  من  $]1, +\infty[$  يكون  $f(x)$  موجوداً إذا وفقط إذا كان

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

. نحل المعادلة  $x^2 - 3x + 2 = 0$  في المجال  $]1, +\infty[$

$$\Delta = 1 \quad \text{إذن} \quad x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = 2$$

$$]1, +\infty[ \quad \text{و} \quad ]1, +\infty[ \quad 2 \in ]1, +\infty[$$

إذن  $f$  غير معرفة في العدد  $2$ .

وبالتالي :  $D = \mathbb{R} - \{2\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 3x) = 4 = f(-1) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 3x) = 4 = f(-1)$$



$$\begin{cases} g(x) = 1 - 3x & , x \leq -1 \\ g(x) = x^2 + x + 4 & , -1 < x \leq 1 \\ g(x) = \frac{1}{x-1} & , x > 1 \end{cases} \text{ أي :}$$

إذن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 2 ، وهو :

$$g : \begin{cases} g(x) = f(x) & x \neq 2 \\ g(2) = 1 \end{cases}$$

### تمرين 15

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

(1) أ- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  وادرس اتصالها على  $D_f$ .

ب- أحسب النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- بين أن الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة  $x_0 = 1$  وحدده.

ب- ادرس نهاية الدالة  $f$  عندما تزول  $x$  إلى  $x_1 = 2$

هل الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة  $x_1$  ؟ علل جوابك.

أكاديمية القنيطرة (دورة مارس 1991)

### الحل

خلاصة :  $1 \notin D_f$  و  $f$  تقبل نهاية منتهية في 1. هذا يعني أن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في 1.  
هذا التمديد هو الدالة  $g$  المعرفة كالتالي :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \text{ إذا كان } x \in D_f \\ g(1) = -4 \end{array} \right.$$

ب- لدينا  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 2 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x - 3 = 5$

وجداول إشارة  $x^2 - 3x + 2$  هو :

$x$	1	2
$x^2 - 3x + 2$	+	-

إذن  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

الدالة  $f$  لا تقبل تمديدا بالاتصال عند النقطة 2 لأن  $f$  لا تقبل نهاية منتهية عند هذه النقطة.

(1) أ- يكون  $x$  عنصرا من  $D_f$  إذا وفقط إذا كان  $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ .  
لدينا  $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$  ، إذن جذرا ثلاثية الحدود

$$x^2 - 3x + 2 \text{ هما : } x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و } x_2 = 1$$

بالتالي :  $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$   
الدالة  $f$  متصلة على  $D_f$  لأنها دالة جذرية.

ب-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(2) أ- لدينا  $1 \notin D_f$

نبحث عن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  . لدينا شكل غير محدد.

$$\text{نلاحظ أن } x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$$\text{و } x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-2} = -4$$

بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4$

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة كالتالي :  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x}$  ،  $f(0) = 2$

- (1) أكتب  $f(x)$  بدون استعمال رمز القيمة المطلقة في المجالات المناسبة.
- (2) ادرس اتصال الدالة  $f$  على اليمين وعلى اليسار عند النقطة  $x_0 = 0$ .

أكاديمية القنيطرة (دورة مارس 1991)

الحل

ومنه  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x} = x^2 - x + 2$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x - 2 = -2$

وبما أن  $f(0) = 2 \neq -2$  فإن  $f$  ليست متصلة على اليمين في 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - x + 2 = 2 = f(0)$

إذن  $f$  متصلة على اليسار في 0.

ملاحظة :  $f$  ليست متصلة عند النقطة 0.

(1) نلاحظ أن  $x^2 - 2x = x(x-2)$ . إذن جدول إشارة  $x^2 - 2x$

$x$	0	2
$x^2 - 2x$	+	-

\* إذا كان  $x \in ]0, 2]$  فإن  $x^2 - 2x \leq 0$

$|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$

ومنه  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x} = x^2 + x - 2$

\* إذا كان  $x \in ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  فإن  $x^2 - 2x \geq 0$

تمرين 17

أحسب النهايات التالية :

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x + 1}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|}$

(4)  $\lim_{x < -1} \frac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|}$

أكاديمية المحمدية (دورة مارس 1991)

الحل

ومنه  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

(3) لدينا :  $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

إذا كان  $x > -1$  فإن  $(x+1)(x+2) > 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{|x^2 + 3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1} = 1$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

(2) لدينا :  $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1)$

$= (x-1)(x^2 - 1)$

$= (x-1)(x-1)(x+1)$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$



## الرياضيات

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{-(x+1)(x+2)} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -\frac{1}{x+2} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x+2} = 1 \text{ أي } \\ (4) \text{ بما أن } x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) \text{ وإذا كان } -2 < x < -1 \text{ فإن } (x+1)(x+2) < 0$$

### تمرين 18

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة بما يلي :

$$g(x) = x^2 \text{ إذا كان } -1 \leq x \leq 1 .$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ إذا كان } |x| > 1 .$$

(1) بين أن الدالة  $g$  متصلة في النقطة 1.

(2) هل الدالة  $g$  متصلة في النقطة -1 ؟ علل جوابك.

أكاديمية المحمدية (دورة مارس 1991)

### الحل

(2) الاتصال في -1 :

$$\text{لدينا } g(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x} = -1 .$$

إذن  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) \neq g(-1)$  . وهذا يعني أن  $g$  ليست متصلة على

اليسار في -1 . وبالتالي فهي غير متصلة في -1 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x} = 1 . \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 = 1 .$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = g(1) = 1 \text{ إذن}$$

وهذا يعني أن الدالة  $g$  متصلة في النقطة 1.

### تمرين 19

$$(1) \text{ أحسب : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4+3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+1}{1-x^3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5-3x^3+2)$$

$$(2) \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة بما يلي : } f(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$$

هل تقبل  $f$  نهاية في النقطة 2 ؟

أكاديمية أكادير (دورة مارس 1991)

الحل

وإذا كان  $x < 2$  فإن  $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)} = -x-3$

ومنه  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$

و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x-3) = -5$

وبالتالي فإن  $f$  لا تقبل نهاية في النقطة 2  $\left( \lim_{x \rightarrow 2^+} f \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f \right)$

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 3x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^4}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  إذن

(2) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن إذا كان  $x > 2$  فإن  $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3$

تمرين 20

لتكن  $g$  الدالة المعرفة بما يلي :  $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

(1) حدد حيز تعريف  $g$ .

(2) بين أن  $g$  تقبل تقديدا بالاتصال في النقطة  $(-2)$  ثم حدده.

(3) هل تقبل  $g$  تقديدا بالاتصال في النقطة 1 ؟

أكاديمية أكادير (دورة مارس 1991)

الحل

وهذا يعني أن  $g$  تقبل تقديدا بالاتصال في النقطة  $(-2)$  وهو الدالة

$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in D_g \\ h(-2) = -\frac{1}{6} \end{cases}$  بحيث

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x(x-1)} = +\infty$

إذن  $g$  ليست لها نهاية منتهية في 1 وهذا يعني أنها لا تقبل تقديدا بالاتصال في 1.

$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

(1)  $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + x^2 - 2x \neq 0\}$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$

$= x(x-1)(x+2)$

إذن  $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, -2\}$

(2) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

إذن لكل  $x$  من  $D_g$   $g(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\frac{1}{6}$



الحل

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)} = -x-3 \quad \text{إذا كان } x < 2 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5 \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x-3) = -5 \quad \text{و}$$

وبالتالي فإن  $f$  لا تقبل نهاية في النقطة 2  $\left( \lim_{x \rightarrow 2^+} f \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 3x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5) = -\infty. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1)}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{إذن}$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \quad \text{لدينا } \mathbb{R} \text{ لكل } x$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3 \quad \text{إذا كان } x > 2 \text{ فإن}$$

تمرين 20

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} \quad \text{لتكن } g \text{ الدالة المعرفة بما يلي :}$$

- (1) حدد حيز تعريف  $g$ .
- (2) بين أن  $g$  تقبل تقديدا بالاتصال في النقطة  $(-2)$  ثم حدده.
- (3) هل تقبل  $g$  تقديدا بالاتصال في النقطة 1 ؟

أكاديمية أكادير (دورة مارس 1991)

الحل

وهذا يعني أن  $g$  تقبل تقديدا بالاتصال في النقطة  $(-2)$  وهو الدالة

$$h(x) = g(x) \quad x \in D_g$$

$$h(-2) = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x(x-1)} = +\infty \quad (3)$$

إذن  $g$  ليست لها نهاية منتهية في 1 وهذا يعني أنها لا تقبل تقديدا بالاتصال في 1.

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + x^2 - 2x \neq 0\} \quad (1)$$

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) \quad \mathbb{R} \text{ لدينا لكل } x$$

$$= x(x-1)(x+2)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, -2\} \quad \text{إذن}$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) \quad \mathbb{R} \text{ لكل } x$$

$$g(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)} \quad D_g \text{ لكل } x$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\frac{1}{6} \quad \text{ومنه}$$

أحسب النهايات الآتية :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 1} ; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3}{x^4 + x} ; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2}{(x^2 - 2)^2} \\ \text{d) } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x^2 - 2}{x + 4} ; & \text{e) } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{x^2 - 2}{x + 4} ; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \end{aligned}$$

أكاديمية تطوان (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x^2 - 2}{x + 4} = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{x^2 - 2}{x + 4} = +\infty \text{ (حسب d)}$$

(f) لدينا  $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 3)}{x + 1} \text{ إذن} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3) = -5 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ (a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3}{x^4 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (b)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2}{(x^2 - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2}{x^4 - 4x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1 \text{ (c)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x + 4) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -4} x^2 - 2 = 14 \text{ لدينا (d)}$$

تمارين 22

تكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 : f(x) &= x^2 + \frac{1}{2} \\ x < 0 : f(x) &= \frac{1}{2} - 2x \cos x + \sin x \end{aligned} \right\}$$

ادرس اتصال  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$

أكاديمية تطوان (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \frac{1}{2} \text{ أي}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0} x \cos x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ لأن} \right)$$

$$\text{وبالتالي فإن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0) \text{ وهذا يعني أن الدالة } f$$

متصلة في النقطة  $x_0 = 0$

$$\text{لدينا } f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \text{ لكل } x \text{ من } [0, +\infty[ \text{ إذن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{وبما أن } f(x) = \frac{1}{2} - 2x \cos x + \sin x \text{ لكل } x \text{ من } ]-\infty, 0[$$

$$\text{فإن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} - 2x \cos x + \sin x \right)$$



نعتبر الدالتين العدديتين  $f$  و  $g$  المعرفة بما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } x \geq 1 \quad g(x) = x^2 + 2x \\ \text{إذا كان } x < 1 \quad g(x) = x - 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } x \geq 1 \quad f(x) = x - 1 \\ \text{إذا كان } x < 1 \quad f(x) = x + 1 \end{array} \right\}$$

(1) بين أن الدالتين  $f$  و  $g$  غير متصلتين في النقطة  $x_0 = 1$

(2) عرف الدالة  $f \cdot g$  وادرس اتصالها في النقطة  $x_0 = 1$

أكاديمية تطوان (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x^2 + 2x) = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x - 1) = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (f \cdot g)(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (f \cdot g)(x) = 0 = f(1) \quad \text{إذن}$$

وهذا يعني أن  $f \cdot g$  متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

نلاحظ إذن أن الدالتين  $f$  و  $g$  غير متصلتين في  $x_0 = 1$  و  $f \cdot g$  متصلة في  $x_0 = 1$ .

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad \text{لدينا :}$$

و  $f(1) = 0$  ، إذن  $f$  ليست متصلة على اليسار في النقطة  $x_0 = 1$  وهذا يعني أنها غير متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

$$\text{كذلك} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \quad \text{و} \quad g(1) = 3$$

إذن  $g$  غير متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

(2) إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $(f \cdot g)(x) = (x - 1)(x^2 + 2x)$  وإذا كان  $x < 1$  فإن  $(f \cdot g)(x) = (x + 1)(x - 1)$

تمرين 24

$$(1) \quad \text{أحسب النهايات التالية :} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - x + 6 \right)$$

$$(2) \quad \text{نعتبر الدالة العددية } f \text{ للمتغير الحقيقي } x \text{ المعرفة بما يلي :} \quad f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 3} - ax \quad (a \text{ عدد حقيقي})$$

$$\text{أ- أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{إذا كان } a = 2$$

$$\text{ب- أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{إذا كان } a > 2$$

$$\text{ج- أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{إذا كان } a < 2$$

أكاديمية بني ملال (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x} = 0 \text{ : ومنه}$$

$$\forall x \in D_f: f(x) = \frac{2x^3+x}{x^2+3} - ax \quad \text{ب-}$$

$$= \frac{2x^3+x-ax(x^2+3)}{x^2+3}$$

$$= \frac{(2-a)x^3+(1-3a)x}{x^2+3}$$

بما أن  $a > 2$  فإن  $2-a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-a)x \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه}$$

ج- في حالة  $a < 2$  فإن  $2-a > 0$  ، إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-a)x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - x + 6 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-(x-6)(x+1)}{x+1} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+7}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - x + 6 \right) = 5$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} \quad *$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = -\frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

$$f(x) = \frac{2x^3+x}{x^2+3} - 2x$$

(2) -أ  $a = 2$  إذن

$$= \frac{2x^3+x-2x(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{-5x}{x^2+3}$$

تمرين 25

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1} & , x \leq 2 \\ f(x) = 2x^2-9 & , x > 2 \end{cases}$$

(1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

(2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة  $x_0 = 2$

(3) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 1 وعرف هذا التمديد.

(4) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :  $g(x) = f(-x+4)$

بين أنه لكل  $x < 2$  فإن  $-x+4 > 2$  واستنتج صيغة g لكل x من المجال  $]-\infty, 2[$  .

أكاديمية بني ملال (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = -1 \quad \text{و}$$

$$f(2) = -1 \quad \text{و}$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  ومنه فإن f متصلة في 2.

(3) لدينا  $1 \notin D$  . ومن جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$$

$$(1) \text{ الدالة } x \mapsto \frac{x^2-4x+3}{x-1} \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{1\} \text{ ، وخصوصا}$$

على المجموعة  $\{1\} - ]-\infty, 2]$  .

والدالة  $x \mapsto 2x^2-9$  معرفة على  $\mathbb{R}$  وخصوصا على  $]2, +\infty[$

إذن  $D = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

$$(2) \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x^2-9 = -1$$



$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & ; x \leq 2 \\ h(x) = 2x^2 - 9 & ; x > 2 \\ h(1) = -2 \end{cases}$$

(4) ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$  بحيث  $x < 2$  ، إذن  $-x > -2$

ومنه  $-x + 4 > 2$

إذن  $f(-x + 4) = 2(-x + 4)^2 - 9 = 2x^2 - 16x + 23$   
بالتالي :  $g(x) = 2x^2 - 16x + 23$  :  $\forall x \in ]-\infty, 2[$  :  $g(x) = f(-x + 4)$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2$

إذن  $f$  تقبل نهاية منتهية في 1.

وبالتالي فإن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في 1.

هذا التمديد هو الدالة  $h$  المعرفة بـ :

## تمرين 26

(1) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^2}{2x - 1}$

(2) حدد العدد الحقيقي  $a$  لكي تكون الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $\begin{cases} f(x) = x + 1 & ; x \leq 1 \\ f(x) = 3 - ax & ; x > 1 \end{cases}$  متصلة في  $x_0 = 1$ .

أكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

## الحل

و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 - ax) = 3 - a$

$f$  متصلة في  $x_0 = 1$  يعني  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

وهذا يكافئ  $3 - a = 2$  أي  $a = 1$ .

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(3 + x)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} -3 - x = -6$

(2) لدينا  $f(1) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$

## تمرين 27

لتكن  $f$  الدالة المعرف بما يلي :  $x \neq 0$  :  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x}$  ،  $f(0) = -2$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) ادرس اتصال الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ .

أكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

## الحل

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + x^2 + x}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2(x^2 - 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2 - 1} = -2$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 = f(0)$

وهذا يعني أن  $f$  متصلة في 0.

(1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x \neq 0 \text{ و } x^2 - x \neq 0\} \cup \{0\}$

$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ و } x \neq 1$

$x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ و } x \neq -1$

إذن  $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x} \right)$

تمرين 28

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}$

(2) لتكن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x}$

بين أن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة  $x_0 = 0$  ، وحدد هذا التمديد.

أكاديمية الجديدة (دورة مارس 1991)

الحل

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}$$

وحسب السؤال (1) فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$

خلاصة :  $0 \notin D_f$  و  $f$  تقبل نهاية منتهية في 0. إذن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال في  $x_0 = 0$ .

هذا التمديد هو الدالة  $g$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x} ; x \neq 0 \\ g(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}x} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

نضع  $X = \frac{\pi}{2}x$  . عندما  $x$  يؤوال إلى 0 فإن  $X$  يؤوال إلى 0.

إذن النهاية المطلوبة هي :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

(2) لدينا  $0 \notin D_f$

من جهة أخرى :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(x-1)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)}{x}$$

تمرين 29

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \cos x}{\cos x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x - 1}{x + 2} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 3)$$

أكاديمية سطات (دورة مارس 1991)



الحل

\* عندما يؤول  $x$  الى  $\frac{\pi}{2}$  و  $x > \frac{\pi}{2}$  فإن  $1 - \cos x$  يؤول الى 1 و  $\cos x$  يؤول الى 0 و  $\cos x < 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 *$$

تمرين 30

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(b) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن الدالة  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال  $g$  في النقطة  $x_0 = \frac{1}{2}$  ثم عرف  $g$ .

أكاديمية سطات (دورة مارس 1991)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x+1) = 2$$

إذن  $f$  تقبل نهاية منتهية في  $\frac{1}{2}$ .

من جهة أخرى  $\frac{1}{2} \notin D_f$ ، إذن  $f$  تقبل تمديدا بالاتصال  $g$  في النقطة

$x_0 = \frac{1}{2}$  والدالة  $g$  معرفة كالتالي :

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ إذا كان } x \neq \frac{1}{2}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \quad (a1)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} = ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[ \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \text{ كذلك}$$

(2) لدينا :